VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Institut dopravy

Modelování dopravních úloh s nelineárními účelovými funkcemi

The Transport Problems Modelling with Non-Linear Objective Functions

Student: David Pecháček

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.

Ostrava 2012

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Institut dopravy

Zadání bakalářské práce

Student: **David Pecháček**

Studijní program: B2341 Strojírenství

Studijní obor: 2301R003 Dopravní technika a technologie

Téma: Modelování dopravních úloh s nelineárními účelovými funkcemi
Transport Problems Modelling with Non-Linear Objective Functions

Zásady pro vypracování:

Osnova práce:
Úvod
1. Obecná formulace dopravní úlohy
2. Kategorizace dopravních úloh
3. Specifikace variant dopravních úloh s nelineárními účelovými funkcemi
4. Matematické modely jednotlivých typů dopravních úloh s nelineárními účelovými funkcemi
5. Výpočetní experimenty se sestavenými modely
6. Zhodnocení dosažených výsledků
Závěr

Seznam doporučené odborné literatury:

Janáček, J. Matematické programování. Žilina: Žilinská univerzita v Žilině. 2. vydání. 2003. 225 s. ISBN 80-8070-054-0
Palúch, S., Peško, Š. Kvantitatívne metódy v logistike. Žilina: Žilinská univerzita v Žilině. 2006. 185 s. ISBN 80-8070-636-0

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.**

Datum zadání: 16.12.2011
Datum odevzdání: 21.05.2012

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ-TECHNICKÁ UNIVERZITA
Fakulta strojní
OSTRAVA

doc. Ing. Vladimír Smrž, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Radim Farana, CSc.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 20. 5. 2012

podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě: 20.5.2011 ....

Jméno a příjmení autora práce: David Pecháček

Adresa trvalého pobytu autora práce: Velká Dlážka 18

Přerov

Poděkování vedoucímu diplomové práce

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Dušanu Teichmanovi, Ph.D. za jeho ochotu věnovat se mi i ve svém volném čase a za trpělivost, kterou mi poskytl v průběhu vypracovávání mé diplomové práce.

ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Pecháček, D. Modelování dopravních úloh s nelineárními účelovými funkcemi Ostrava: Institut dopravy, Fakulta strojní, VŠB – TU Ostrava, 2012, 46 s. Vedoucí bakalářské práce: Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.

Bakalářská práce se zabývá modelováním dopravních úloh nelineárními účelovými funkcemi a jejich zobecněním. První část popisuje definice a typy dopravních úloh. Druhá část se zabývá matematickými modely dopravních úloh s nelineárně se vyvíjejícími přepravními náklady a testováním jejich správné funkčnosti pomocí programu Xpress-IVE.

ANNOTATION OF THE THESIS

Pecháček, D. Transport Problems Modelling with Non-Linear Objective Functions, Ostrava: Institute of Transport, Faculty of Mechanical Engeneering, VŠB-TU Ostrava, 2012, 46 p. Thesis head: Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.

This thesis deals with how modelling of transport problems with non-linear objective functions becomes common. The first part describes definitions and types of transport roles. The second part deals with mathematical models of transport roles with non-linear transport costs and testing of their functional rightness by software Xpress-IVE.

OBSAH

SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ

C_{11}	nelineární náklady pro účelové funkce	[Kč]
Q_{ij}	označení hraniční hodnoty dělící od sebe nákladová pásma	[t, ks]
T	prohibitivní konstanta	[-]
Z	bivalentní proměnná	[-]
a_i	kapacita *i*-tého odesílacího stanoviště	[t, ks]
b_j	požadavek *j*-tého odesílacího stanoviště	[t, ks]
c_{ij}	sazba za přepravu přepravního elementu z *i*-tého odesílacího do *j*-tého cílového stanoviště	[$Kč.t^{-1}$, $Kč.ks^{-1}$]
k	směrnice linearizující úsečky	[-]
m	počet odesílacích stanovišť	[-]
n	počet cílových stanovišť	[-]
p_{ij}	počet dělících bodů pro relaci $z_i \rightarrow s_j$	[-]
x_{ij}	proměnná charakterizující objem přepravy mezi *i*-tým odesílacím a *j*-tým cílovým stanovištěm	[t, ks]
y_{ijk}	objemy přepravy v relaci $z_i \rightarrow s_j$ v pásmu k	[t, ks]

•

1. ÚVOD

Od výsledků úloh majících zásadní vliv na chod podniku, jako jsou např. řízení zásob, řízení toku materiálu, doprava, skladování, atd., se očekává účelnost a efektivita. Účelnosti a efektivity lze dosáhnout pouze nalezením optimálního řešení nebo řešení, které je optimálnímu řešení blízké. K vyhledávání optimálních řešení se používá celá řada nástrojů a metod. Jednu skupinu metod tvoří matematické programování.

Matematické programování je moderní obor využívaný prakticky ve všech oblastech lidské činnosti, v nichž dochází k formulování a realizaci rozhodovacích procesů. Mezi ně nesporně patří i doprava. Nejvíce propracovanou částí matematického programování je tzv. lineární programování. Lineární programování má tu nezastupitelnou výhodu, že pokud máme k dispozici dostatečně efektivní model a dostatečně výkonnou výpočetní techniku, dokáží metody lineárního programování vyhledat optimální řešení i v poměrně rozsáhlých úlohách.

Ne všechny rozhodovací procesy však probíhají ideálně tak, aby bylo možno lineární programování bez sebemenší komplikace přímo využít. Jedním z problémů, který se v reálné praxi vyskytuje, jsou dopravní úlohy, jejichž účelové funkce (zpravidla modelující přepravní náklady) se nevyvíjejí lineárně, ale nelineárně.

Cílem bakalářské práce je vytvořit na základě poznatků dostupných v odborné literatuře zobecněné matematické modely dopravních úloh různých typů s nelineárně se vyvíjejícími přepravními náklady a otestovat jejich funkčnost na modelové úloze.

2. OBECNÁ FORMULACE DOPRAVNÍ ÚLOHY

Dopravní úloha je speciálním případem problému, při jehož řešení bylo úspěšně použito metod lineárního programování. Dopravní úloha je typ úlohy, ve které je dáno ***m*** odesílacích stanovišť (někdy také říkáme „zdrojů“) a ***n*** cílových stanovišť (někdy také hovoříme o „spotřebitelích“), mezi kterými se přepravuje homogenní typ zásilek. U každého odesílacího stanoviště $i = 1,\dots, m$ známe jeho kapacitu a_1, u každého cílového stanoviště $j = 1, 2,\dots, n$ známe jeho požadavek b_j. Kapacity a požadavky mohou být jak jednorázové, tak i pravidelně se opakující, např. za zvolené časové období. Dále je k dispozici matici sazeb $\{c_{ij}\}$, která může udávat např. náklady na přepravu jedné zásilky (jedné jednotky), resp. kilometrickou vzdálenost, mezi *i*-tým odesílacím stanovištěm a *j*-tým cílovým stanovištěm. Úlohou je rozhodnout o objemech přepravy v jednotlivých relacích (tzv. přepravním plánu), který se bude vyznačovat celkovými minimálními přepravními náklady.

Dopravní úlohy v základním tvaru definované v předchozím odstavci mohou mít celou řadu modifikací, které obvykle vyplývají z doplňkových omezení formulovaných v zadání. Vyskytují se tedy typy dopravních úloh se sankcemi, s fixními sazbami s přepravami v kontejnerech a další typy. Všechny uvedené typy úloh mají společný základ, je v nich definována množina existujících zdrojů, množina existujících spotřebitelů a vždy se rozhoduje o objemech přepravy jednotlivých relací mezi zdroji a spotřebiteli. Ve všech uvedených typech úloh je uvažováno s lineárními účelovými funkcemi. Jedná se typy úloh, jejichž modely jsou velmi propracované snadno řešitelné v dostupných softwarových nástrojích (Microsoft Excel, Xpress-IVE, apod.).

S dopravními úlohami velice úzce souvisí alokační úlohy s kapacitním omezením zdrojů, které je do jisté míry možné považovat za speciální typ dopravních úloh. Specifičnost alokačních úloh spočívá v tom, že jednotlivé spotřebitele je přípustné zásobovat pouze z jednoho zdroje. V této úloze není tedy potřebné rozhodovat o objemech přepravy v jednotlivých relacích, protože je zřejmé, že v důsledku jednoznačného přiřazení spotřebitele zdroji, se přeprava veškerého jeho požadavku soustředí na relaci vyplývající z navrženého přiřazení.

V souvislosti s modely dopravních úloh se nejčastěji vyskytují následující pojmy [2]:

Model

zjednodušené zobrazení reálného systému, který je předmětem modelování, do podoby vhodnější pro další zkoumání. Modely mohou být buď fyzické (předměty, makety) nebo abstraktní (formálně zapsané, či jinak formálně vyjádřené – matematické, fyzikální, simulační).

Matematický model

je takový model, který je vytvořený pomocí matematických výrazových prostředků.

Modelování

teoreticko-poznávací proces založený na abstraktním myšlení, při němž zkoumáme místo předmětu modelu (originálu) jiný objekt – model. Poznatky získané na modelu musí být vždy zpětně transformovány určitými logickými procedurami na předmět modelování.

Omezující podmínky

faktory udávající omezení vystupující v úloze.

Optimalizace

postup hledání optimálního řešení.

Optimalizační kritérium

hledisko, podle kterého posuzujeme efektivitu jednotlivých řešení. Optimalizační kritérium bývá nejčastěji formulováno jako funkční vztah, tzv. účelová funkce.

Optimální řešení

přípustné řešení minimalizující (maximalizující) účelovou funkci (za daných vstupních podmínek nejlepší dosažitelné) řešení. Úloha může mít i více než jen jedno optimální řešení, na druhou stranu existují i případy, kdy úloha optimální řešení nemá (např. proto, že je množina přípustných řešení prázdná).

Přípustné řešení

každé řešení úlohy vyhovující všem zadaným omezujícím podmínkám.

3. KATEGORIZACE KONVENČNÍCH DOPRAVNÍCH ÚLOH

Základním kritériem rozdělujícím konvenční dopravní úlohy do dvou skupin je vzájemný poměr součtu kapacit odesílacích stanovišť a požadavků cílových stanovišť. Z tohoto pohledu rozlišujeme dopravní úlohy:

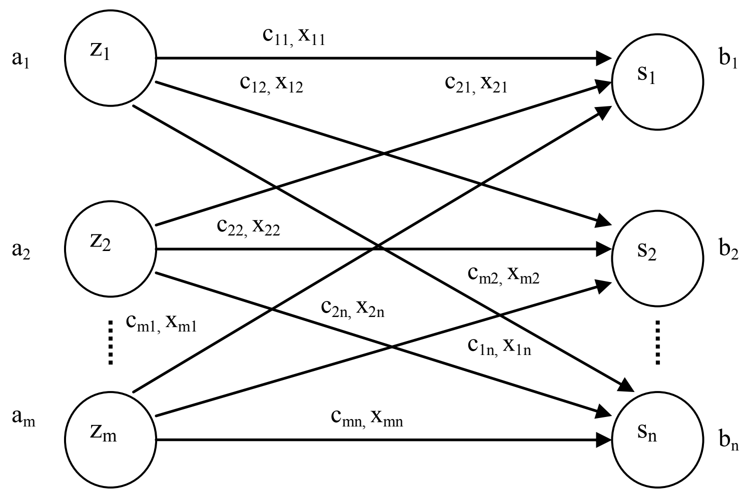
- vybilancované (vyrovnané).

- nevybilancované (nevyrovnané).

3.1 Vybilancovaná dopravní úloha a její vlastnosti:

Dopravní úlohu, v níž platí $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, nazýváme vybilancovanou dopravní úlohou. Jak plyne z matematického zápisu, jedná se tedy o úlohu, v níž je součet kapacit všech odesílacích stanovišť roven součtu požadavků všech cílových stanovišť.

Obr. č. 3.1 Grafické znázornění matematického modelu vybilancované dopravní úlohy [5].



Obr. č. 3.1 Grafické znázornění matematického modelu vybilancované dopravní úlohy

Obecný zápis modelu vybilancované dopravní úlohy:

$$\min f(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + + c_{mn}x_{mn}$$

za podmínek:

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots\ldots + x_{1n} = a_1 \\
&x_{21} + x_{22} + \ldots\ldots\ldots + x_{2n} = a_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_{1n} + x_{2n} + \ldots\ldots\ldots + x_{mn} = a_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} + \ldots\ldots\ldots + x_{m1} = b_1 \\
&x_{12} + x_{22} + \ldots\ldots\ldots + x_{m2} = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_{1n} + x_{2n} + \ldots\ldots\ldots + x_{mn} = b_n
\end{aligned}$$

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn} \geq 0$$

Zkrácená podoba obecného zápisu modelu vybilancované dopravní úlohy má tvar:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (3.1)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \qquad (3.4)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Výraz (3.1) reprezentuje účelovou funkci – celkové náklady plynoucí z navrženého přepravního plánu, jejichž hodnota má být minimalizována. Skupina omezujících podmínek (3.2) zajistí, že kapacity všech zdrojů budou vyčerpány. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu zdrojů. Skupina omezujících podmínek (3.3) zajistí, že požadavky všech spotřebitelů budou splněny. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu spotřebitelů. Skupina omezujících podmínek (3.4) vymezuje definiční obory proměnných. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu proměnných (počtu objemů přepravy modelovaných v rámci navrhovaného přepravního plánu).

Z obecného modelu vybilancované dopravní úlohy lze odvodit, že v dopravní úloze existují dvě základní skupiny strukturálních podmínek. První skupina strukturálních podmínek se vztahuje ke kapacitám zdrojů, druhá skupina strukturálních podmínek k požadavkům spotřebitelů. V obecné poloze lze dále konstatovat, že model dopravní úlohy obsahuje v první skupině ***m*** podmínek a ve druhé skupině ***n*** podmínek. Počet proměnných vyskytující se v úloze je ***m n.***

V případě vybilancované dopravní úlohy platí následující teoretické poznatky:

Věta 1: „Množina přípustných řešení vybilancované dopravní úlohy je konvexní."

Obecně lze říci, že konvexní množina tvořící množinu přípustných řešení všeobecné úlohy lineárního programování určená konečnou soustavou omezujících podmínek může být:

- prázdnou množinou,
- konvexním polyedrem (bod je rovněž považován za konvexní polyedr),
- neohraničenou konvexní oblastí.

Na rozdíl od všeobecné úlohy lineárního programování nemohou však u vybilancované dopravní úlohy nastat situace, že by množina přípustných řešení byla prázdná, resp. že by byla neohraničenou konvexní oblastí, o čemž svědčí následující věty.

Věta 2: Vybilancovaná dopravní úloha má vždy přípustné řešení.

Věta 3: Vybilancovaná dopravní úloha má vždy optimální řešení.

Věta 4: Jsou-li všechny kapacity odesílacích stanovišť a požadavky cílových stanovišť celá nezáporná čísla, každé základní řešení se skládá pouze z celých čísel.

Z předchozích vět vyplývá, že množina přípustných řešení vybilancované dopravní úlohy je vždy konvexním polyedrem. Pro praktický výpočet je velice důležité zjištění, že optimální řešení se nachází vždy v krajním bodu konvexního polyedru. Následující věta platí jak pro oba typy všeobecné úlohy lineárního programování (minimalizační i maximalizační). S ohledem na skutečnost, že v dopravních úlohách vždy minimalizujeme optimalizační kritérium, je zde uvedena pouze verze platná pro úlohy o minimalizaci.

Věta 5: Účelová funkce nabývá minima v krajním bodu konvexního polyedru, který je množinou přípustných řešení dané úlohy. Jestliže účelová funkce nabývá minima ve více než jednom krajním bodu, dosahuje stejných hodnot ve všech bodech, které jsou konvexními kombinacemi bodů, v nichž účelová funkce nabývá minima (leží tedy na spojnici těchto bodů).

3.2 Nevybilancované dopravní úlohy

Dopravní úlohy, v nichž platí $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ nazýváme nevybilancovanými dopravními úlohami.

Je zřejmé, že v případě nevybilancovaných dopravních úloh můžeme rozlišovat dva případy a to:

- součet kapacit všech odesílacích stanovišť převyšuje součet požadavků všech cílových stanovišť,

- součet kapacit všech odesílacích stanovišť nedosahuje součtu požadavků všech cílových stanovišť.

Dopravní úlohy, v nichž platí $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ nazýváme nevybilancovanými dopravními úlohami s přebytkem kapacit zdrojů nebo také s nedostatkem požadavků spotřebitelů.

Obecný zápis nevybilancované dopravní úlohy s přebytkem kapacit zdrojů:

$$\min f(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \\ + c_{mn}x_{mn}$$

za podmínek:

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + \dots\dots\dots + x_{1n} \leq a_1 \\
&x_{21} + x_{22} + \dots\dots\dots + x_{2n} \leq a_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x_{1n} + x_{2n} + \dots\dots\dots + x_{mn} \leq a_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} + \dots\dots\dots + x_{m1} = b_1 \\
&x_{12} + x_{22} + \dots\dots\dots + x_{m2} = b_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x_{1n} + x_{2n} + \dots\dots\dots + x_{mn} = b_j
\end{aligned}
$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn} \geq 0$$

Zkrácená podoba obecného zápisu nevybilancované dopravní úlohy s přebytkem kapacity zdrojů:

$$min\, f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (3.5)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m \qquad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \qquad (3.7)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m \qquad (3.8)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Výraz (3.5) reprezentuje účelovou funkci – celkové náklady plynoucí z navrženého přepravního plánu, jejichž hodnota má být minimalizována. Skupina omezujících podmínek (3.6) zajistí, že kapacita žádného zdroje nebude překročena. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu zdrojů. Skupina omezujících podmínek (3.7) zajistí, že požadavky všech spotřebitelů budou splněny. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu spotřebitelů. Skupina omezujících podmínek (3.8) vymezuje definiční obory proměnných. Počet omezujících podmínek ve skupině opět odpovídá počtu proměnných.

Při praktickém řešení tohoto typu dopravní úlohy se do úlohy dodává fiktivní cílové stanoviště s požadavkem b_f, který bude roven:

$$b_f = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Dopravní úlohy, v nichž platí $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, nazýváme nevybilancovanými dopravními úlohami s nedostatkem kapacit zdrojů nebo také s přebytkem požadavků spotřebitelů.

Obecný zápis nevybilancované dopravní úlohy s nedostatkem kapacit zdrojů:

$$\min f(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \\ + c_{mn}x_{mn}$$

za podmínek:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots\ldots + x_{1n} &= a_1 \\
x_{21} + x_{22} + \ldots\ldots\ldots + x_{2n} &= a_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots\ldots\ldots + x_{mn} &= a_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + \ldots\ldots\ldots + x_{m1} &\leq b_1 \\
x_{12} + x_{22} + \ldots\ldots\ldots + x_{m2} &\leq b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots\ldots\ldots + x_{mn} &\leq b_j
\end{aligned}$$

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn} \geq 0$$

Zkrácená podoba obecného zápisu nevybilancované dopravní úlohy s nedostatkem kapacity zdrojů:

$$min\ f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \tag{3.9}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \qquad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \qquad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.11)$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \qquad (3.12)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Výraz (3.9) reprezentuje účelovou funkci – celkové náklady plynoucí z navrženého přepravního plánu, jejichž hodnota má být minimalizována. Skupina omezujících podmínek (3.10) zajistí, že kapacity všech zdrojů budou vyčerpány. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu zdrojů. Skupina omezujících podmínek (3.11) zajistí, že požadavky všech spotřebitelů budou částečně nebo celkově splněny. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu spotřebitelů. Skupina omezujících podmínek (3.12) vymezuje definiční obory proměnných. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá opět počtu proměnných.

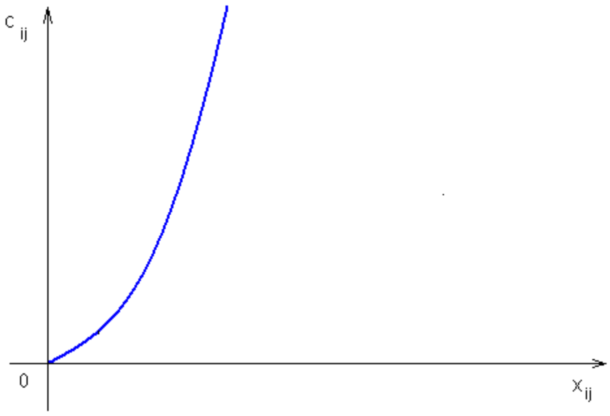
Při řešení této dopravní úlohy se na rozdíl od předchozího typu nevybilancované dopravní úlohy dodává fiktivní odesílací stanoviště, jehož kapacita a_f bude rovna.

$$a_f = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

4. SPECIFIKACE VARIANT DOPRAVNÍCH ÚLOH S NELINEÁRNÍMI ÚČELOVÝMI FUNKCEMI

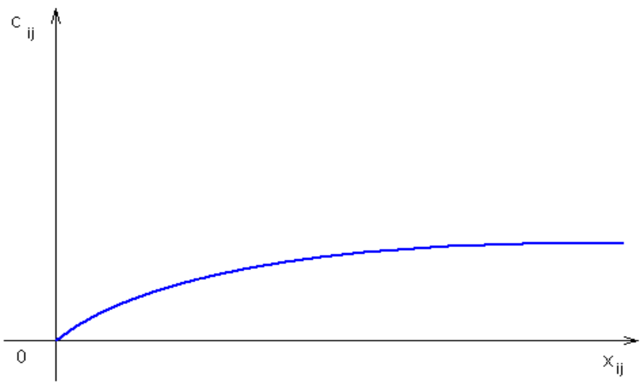
V praktických aplikacích však nemusí vždy platit pravidlo, že se celkové přepravní náklady pro příslušnou relaci vyvíjejí v závislosti na objemu přepravy lineárně (proporcionálně). Kromě lineárních přepravních nákladů se mohou vyskytnout dva základní typy úloh – dopravní úloha s celkovými přepravními náklady pro relaci vyvíjecími se progresivně (nadproporcionálně) nebo degresivně (podproporcionálně).

Příklad nákladové funkce vyvíjející se progresivně je vidět na obr. č. 4.1.



Obr č. 4.1 Příklad nákladové funkce vyvíjející se progresivně

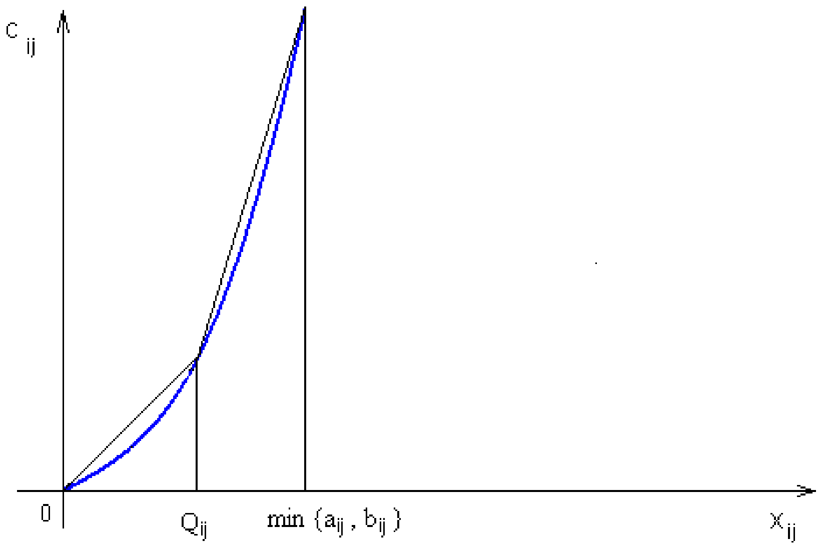
Příklad nákladové funkce vyvíjející se degresivně je vidět na obr. č. 4.2.



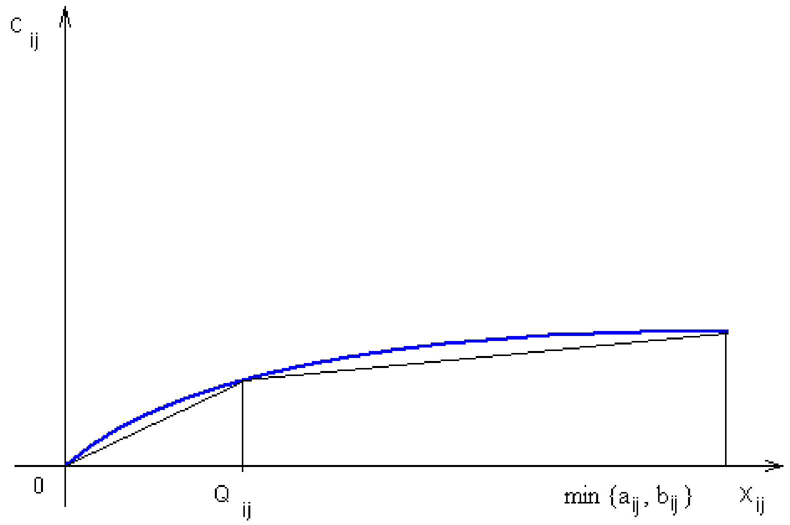
Obr č. 4.2 Příklad nákladové funkce vyvíjející se degresivně.

Vyvíjejí-li se členy účelové funkce nelineárně, je jedním ze základních přístupů pro řešení takové úlohy proces její linearizace.

Příklad linearizace progresivního typu funkce je vidět na obr. č. 4.3, příklad linearizace funkce degresivního typu je pak vidět na obr. č. 4.4.



Obr č. 4.3 Princip linearizace nákladové funkce vyvíjející se progresivně



Obr č. 4.4 Princip linearizace nákladové funkce vyvíjející se degresivně

Postupy linearizace matematického modelu úlohy s nelineárními přepravními náklady liší v závislosti na typu nelineární funkce.

Postup linearizace modelu po jednotlivých krocích bude podrobně demonstrován na dopravní úloze, kde se přepravní náklady nevyvíjejí lineárně v jedné relaci a jejich linearizace bude probíhat po částech lomenou lineární funkcí se dvěma směrnicemi. K demonstraci byl vybrán typ vybilancované dopravní úlohy.

Jako první v pořadí bude uveden případ, kdy se nákladová funkce vyvíjí progresivně, následně potom případ, kdy se nákladová funkce vyvíjí degresivně [1].

4.1 Model pro variantu nákladové funkce vyvíjející se progresivně

Nechť přepravní náklady rostou progresivně např. v relaci $z_1 \to s_1$. Označíme-li C_{11} nelineární náklady vznikající v uvedené relaci, potom celkové náklady vznikající v úloze se vypočítají podle vzorce (4.1):

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - \mathrm{c}_{11} x_{11} + C_{11} \tag{4.1}$$

Součet (první člen) účelové funkce reprezentuje celkové náklady vzniklé v úloze, ve které se náklady ve všech relacích vyvíjejí lineárně. Je zřejmé, že chceme-li vypočítat celkové náklady na přepravu v úloze, ve které se náklady v relaci $z_1 \to s_1$ vyvíjejí nelineárně, musíme od celkových nákladů na přepravu odečíst hodnotu nákladů vyvíjejících se v této relaci lineárně a následně přičíst hodnotu nákladů vyvíjejících se v této relaci nelineárně.

Za účelem linearizace nelineárního vývoje přepravních nákladů v relaci $z_1 \to s_1$ je zapotřebí nejdříve provést rozklad původního objemu přepravy x_{11} na dvě dílčí složky, jak vyplývá z obr. č. 4.1. První složku bude tvořit část objemu přepravy x_{11} vztahující se k prvnímu dílčímu intervalu $\langle 0; Q_{11} \rangle$, tj. intervalu, ve kterém je směrnice přímky linearizující nelineární průběh nákladů menší. Druhou složku bude tvořit část objemu přepravy $\langle Q_{11}; \min\{a_1, b_1\} \rangle$, ve kterém bude směrnice přímky linearizující nelineární průběh nákladů větší. Označíme-li jednotkové náklady v intervalu $\langle 0; Q_{11} \rangle$ v této relaci jako $\overline{c_{111}}$ a jednotkové náklady v intervalu $\langle Q_{11}; \min\{a_1, b_1\} \rangle$ v této relaci jako $\overline{c_{112}}$, potom platí $\overline{c_{111}} < \overline{c_{112}}$. Rozklad objemu přepravy x_{11} bude proveden pomocí proměnných y_{111} a y_{112}. V uvedených rozkladových proměnných bude zavedena následující indexová konvence (bude využívána v textu celé práce). První dva indexy budou reprezentovat relaci (význam bude převzat z klasického modelu dopravní úlohy). Třetí index bude reprezentovat takzvané „nákladové pásmo“, přičemž nákladová pásma odpovídají intervalům s různými směrnicemi aproximujícími nelineární průběh. Vztaženo k demonstračnímu příkladu bude v pořadí třetí index 1 reprezentovat objem přepravy v intervalu $\langle 0; Q_{11} \rangle$, index 2 na třetí pozici bude reprezentovat objem přepravy v intervalu $\langle Q_{11}; \min\{a_1, b_1\} \rangle$. Dále je zřejmé, že musí platit:

$$x_{11} = y_{111} + y_{112} \tag{4.2}$$

Vztah (4.2) vytváří zároveň tzv. vazební podmínku, která vytváří logický vztah mezi adekvátními hodnotami proměnných různých skupin a také vazby na kapacitní a spotřebitelské podmínky. Musí být tedy obsažena i v sestavovaném matematickém modelu demonstrační úlohy.

Je zřejmé, že s rozšiřujícím se počtem intervalů po částech lineární funkce se na jednu stranu zvyšuje přesnost lineární aproximace, což může ovšem na stranu druhou časem výrazně zkomplikovat řešitelnost úlohy (zvyšuje se počet proměnných a omezujících podmínek).

Při vlastní sestavě modelu dopravní úlohy s progresivně se vyvíjecími přepravními náklady se postupuje podle obecného postupu platného pro sestavu „klasického“ modelu dopravní úlohy a v intencích předchozích odstavců. Kromě vztahu (4.2) musí být v modelu zohledněno ještě jedno omezení, bez něj by totiž docházelo ke zkreslení hodnoty účelové funkce. Zkreslení by bylo způsobeno globálním používáním sazby $\overline{c_{111}}$ i pro objemy přepravy nacházející se ve druhém nákladovém pásmu, protože jde o nižší sazbu, tj. při minimalizačním typu úlohy algoritmem preferovanou. Protože není možnost omezit její použití prostřednictvím jí samé, je nutno to učinit prostřednictvím hodnoty proměnné, ke které se vztahuje. V modelu (4.3) se tedy do soustavy omezujících podmínek přidá další strukturální podmínka, která má tvar:

$$y_{111} \leq Q_{11} \tag{4.3}$$

Matematický model vybilancované dopravní úlohy s progresivně se vyvíjející typem nelineární nákladové funkce v relaci $z_1 \rightarrow s_1$ bude mít tedy tvar:

$$\min f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \mathrm{c}_{11}x_{11} + \overline{c_{111}}y_{111} + \overline{c_{112}}y_{112} \tag{4.4}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.6}$$

$$x_{11} = y_{111} + y_{112} \tag{4.7}$$

$$y_{111} \leq Q_{11} \tag{4.8}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.9}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_{111} \geq 0 \tag{4.10}$$

$$y_{112} \geq 0 \tag{4.11}$$

Skupina omezujících podmínek (4.5) zajistí, že kapacity všech zdrojů budou vyčerpány. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu zdrojů. Skupina omezujících podmínek (4.6) zajistí, že požadavky všech spotřebitelů budou splněny. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu spotřebitelů. Omezující podmínka (4.7) zajistí požadovanou logickou vazbu mezi proměnnou x_{11} a proměnnými y_{111}, y_{112}, v důsledku vytvořené vazby v soustavě omezujících podmínek dochází také k aktivní integraci členů $\overline{c_{111}}y_{111} + \overline{c_{112}}y_{112}$ do procesu optimalizace. Omezujících podmínka (4.8) zajistí, že hodnota objemu přepravy pro první pásmo nepřekročí hodnotu Q_{11}. Omezujících podmínka (4.8) pro proměnnou y_{112} nemusí být vytvářena. Algoritmus bude totiž hodnoty proměnné y_{112} využívat pouze v nezbytné míře. Vždy bude preferovat obsazování proměnné y_{111}, protože k této proměnné se váží nižší jednotkové náhrady (preference nižších sazeb plyne z typu hledaného extrému, kterým je minimum). Skupiny omezujících podmínek (4.9) - (4.11) vymezují definiční obory proměnných. Počty omezujících podmínek ve skupinách (4.9) - (4.11) odpovídají počtu proměnných, tj. v modelu (4.4) - (4.11) se bude vyskytovat $m\,n+2$.

4.2 Model pro nákladové funkce vyvíjející se degresivně

Při modelování dopravní úlohy s degresivně se vyvíjecími přepravními náklady se postupuje analogicky jako v předchozím případě. Základ modelu opět tvoří model "klasické" dopravní úlohy, do kterého je zapotřebí přidat doplňující podmínky zajišťující korektní chování účelové funkce. Do úlohy je dále třeba zavést bivalentní proměnnou Z. Její význam bude vysvětlen dále. Do soustavy omezujících podmínek pak musí být zavedena dvojice podmínek:

$$ZQ_{11} \leq y_{111}$$

$$y_{112} \leq ZT$$

Mechanizmus činnosti uvedených podmínek je následující. Jestliže objem přepravy x_{11} překročí hodnotu Q_{11}, tj. $y_{112} > 0$, druhá z uvedených podmínek zajistí, aby proměnná Z nabyla hodnoty 1. V tomto okamžiku nabude levá strana první podmínky hodnotu Q_{11} a následně tato první podmínka zajistí, že $y_{111} = Q_{11}$. Lze tedy odvodit, že situace, ve které $y_{112} > 0$ nastane až v případě, kdy $y_{111} = Q_{11}$. Jestliže nastane situace, kdy $y_{111} < Q_{11}$, je první podmínka splnitelná pouze, když $Z = 0$. V této situaci druhá podmínka zajišťuje, že $y_{112} = 0$, protože pravá strana podmínky bude rovna nule.

Matematický model vybilancované dopravní úlohy s degresivně se vyvíjejícím typem nelineární nákladové funkce v relaci $z_1 \rightarrow s_1$ bude mít tedy tvar:

$$\min f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \mathrm{c}_{11}x_{11} + \overline{c_{111}}y_{111} + \overline{c_{112}}y_{112} \qquad (4.12)$$

$$x_{11} = y_{111} + y_{112} \qquad (4.13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad \text{pro i = 1, 2, …, m} \qquad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{pro j = 1, 2, …, n} \qquad (4.15)$$

$$ZQ_{11} \leq y_{111} \qquad (4.16)$$

$$y_{112} \leq ZT \qquad (4.17)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{pro } i = 1, 2, ..., m \qquad (4.18)$$

$$j = 1, 2, ..., n$$

$$y_{111} \geq 0 \qquad (4.19)$$

$$y_{112} \geq 0 \qquad (4.20)$$

$$Z \in \{0;1\} \qquad (4.21)$$

Výraz (4.12) reprezentuje účelovou funkci – celkové náklady plynoucí z navrženého přepravního plánu, jejichž hodnota má být minimalizována. Omezující podmínka (4.13) zajistí požadovanou logickou vazbu mezi proměnnou x_{11} a proměnnými y_{111}, y_{112}. V důsledku vytvořené vazby v soustavě omezujících podmínek dochází také k aktivní integraci členů $\overline{c_{111}} y_{111} + \overline{c_{112}} y_{112}$ do optimalizačního výpočtu. Skupina omezujících podmínek (4.14) zajistí, že kapacity všech zdrojů budou vyčerpány. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu zdrojů. Skupina omezujících podmínek (4.15) zajistí, že požadavky všech spotřebitelů budou splněny. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu spotřebitelů. Podrobná funkce podmínek (4.16) a (4.17), byla vysvětlena před uvedením modelu. Skupiny omezujících podmínek (4.18) - (4.21) vymezují definiční obory proměnných.

5. MATEMATICKÉ MODELY JEDNOTLIVÝCH TYPŮ DOPRAVNÍCH ÚLOH S NELINEÁRNÍMI ÚČELOVÝMI FUNKCEMI

Tato kapitola bakalářské práce bude věnována zobecnění poznatků uvedených v předchozí kapitole, ve které byl uveden matematický model dopravní úlohy s výskytem nelineárních celkových přepravních nákladů v jedné relaci. V tom to směru lze spatřovat hlavní přínos bakalářské práce, která si klade za cíl zobecnit uvedený přístup na větší počet relací a větší počet nákladových pásem.

Jako první v pořadí bude sestaven obecný model pro úlohu, ve které se celkové přepravní náklady ve všech relacích vyvíjejí progresivně.

5.1 Obecný matematický model dopravní úlohy s progresivně se vyvíjejícími jednotkovými náklady

5.1.1 Formulace problému

Je dáno *m* zdrojů a *n* spotřebitelů, mezi kterými se přepravuje homogenní typ zásilek. U každého zdroje $i = 1,2,...,m$ známe jeho kapacitu a_i, u každého spotřebitele $j = 1,2,...,n$ známe jeho požadavek b_j. Dále známe funkční předpisy, na základě kterých se vyvíjejí nelineární nákladové funkce v jednotlivých relacích $f(c)$, přičemž ve všech případech se jedná o progresivní nákladové funkce. Úkolem je rozhodnout o objemech přepravy v jednotlivých relacích (přepravním plánu) tak, aby celkové náklady na realizaci přepravního plánu byly minimální.

5.1.2 Řešení problému

K aproximaci nelineárních členů účelové funkce bude použit již několikrát zmiňovaný linearizační přístup, to znamená, že nelineární účelová funkce bude aproximována po částech lineární funkcí. Pro každou relaci $z_i \rightarrow s_j$ se stanoví počet dělících bodů vymezujících jednotlivá pásma, mezi kterými bude nelineární účelová funkce linearizována úsečkou (reprezentující část lineární lomené funkce). Označme počet těchto bodů pro relaci $z_i \rightarrow s_j$ jako p_{ij}. Na základě sousedních dvojic zvolených dělících bodů vypočítáme hodnoty směrnic úseček, které tyto dvojice bodů propojují. Označme směrnici úsečky k platící pro relaci $z_i \rightarrow s_j$ symbolem $\overline{c_{ijk}}$ a horní hraniční hodnotu symbolem Q_{ijk}, kde $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$, $k = 1,2,..., p_{ij}$.

Výpočet hodnoty směrnice úsečky lze tedy realizovat podle vztahu (5.1):

$$\overline{c_{ijk}} = \frac{f(Q_{ijk}) - f(Q_{ijk-1})}{Q_{ijk} - Q_{ijk-1}} \qquad (5.1)$$

Poznámka:

Indexy u symbolu p vyjadřují, že počet pásem v jednotlivých relacích může být různý. Pokud by u symbolu p nebyl zařazen žádný index, znamenalo by to, že počet pásem je v každé relaci stejný, analogický komentář bude platit i v případě dopravní úlohy s degresivními nelineárními nákladovými funkcemi.

Za účelem modelování objemů přepravy v jednotlivých relacích a pásmech bude do modelu zavedena proměnná y_{ijk}, kde $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$, $k = 1,2,..., p_{ij}$. Obecný matematický model pro řešení dopravní úlohy s progresivně se vyvíjejícími celkovými přepravními náklady v jednotlivých relacích má tvar:

$$\min f(y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_{ij}} c_{ijk} y_{ijk} \qquad (5.2)$$

Za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_{ij}} y_{ijk} = a_i \qquad i = 1,2,...,m \qquad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p_{ij}} y_{ijk} = b_j \qquad j = 1,2,...,n \qquad (5.4)$$

$$y_{ij1} \leq Q_{ij1} \qquad i = 1,2,...,m \qquad j = 1,2,...,n \qquad (5.5a)$$

$$y_{ijk} \leq Q_{ijk} - Q_{ijk-1} \qquad i = 1,2,...,m \qquad j = 1,2,...,n \qquad k = 2,..., p_{ij} \qquad (5.5b)$$

$$y_{ijk} \geq 0 \qquad i = 1,2,...,m \qquad j = 1,2,...,n \qquad k = 1,2,..., p_{ij} \qquad (5.6)$$

Rovnice (5.2) reprezentuje účelovou funkci. Skupina omezujících podmínek (5.3) zajistí, že kapacity všech zdrojů budou vyčerpány. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu zdrojů. Skupina omezujících podmínek (5.4) zajistí, že požadavky všech spotřebitelů budou splněny. Skupina omezujících podmínek (5.5a) a (5.5b) zajistí, že objemy přeprav v jednotlivých pásmech nepřekročí maximální hodnoty, které pro příslušná pásma platí. Počet omezujících podmínek ve skupinách (5.5a) a (5.5b) je ovlivňován počtem zdrojů, počtem spotřebitelů a počtem pásem vyskytujících se v jednotlivých relacích. Pokud by byl počet nákladových pásem stejný u všech relací, bude počet omezujících podmínek v daných skupinách $m\,n\,p$. Obecně je počet omezujících podmínek tohoto typu roven součtu počtů pásem vyskytujících se v jednotlivých relacích. Skupina omezujících podmínek (5.6) vymezuje definiční obory proměnných (nezápornost objemů přeprav v jednotlivých relacích a nákladových pásmech).

Jako druhý v pořadí bude sestaven obecný model pro úlohu, ve které se jednotkové náklady vyvíjejí degresivně.

5.2 Obecný matematický model dopravní úlohy s degresivně se vyvíjejícími jednotkovými náklady

5.2.1 Formulace problému

Je dáno *m* zdrojů a *n* spotřebitelů, mezi kterými se přepravuje homogenní typ zásilek. U každého zdroje $i = 1,2,...,m$ známe jeho kapacitu a_i, u každého spotřebitele $j = 1,2,...,n$ známe jeho požadavek b_j. Dále známe funkční předpisy, na základě kterých se vyvíjejí nelineární nákladové funkce v jednotlivých relacích $f(c)$, přičemž se jedná o degresivní nákladové funkce. Úkolem je rozhodnout o objemech přepravy v jednotlivých relacích (přepravním plánu) tak, aby celkové náklady na realizaci přepravního plánu byly minimální.

5.2.2 Řešení problému

Analogicky, jako v případě úlohy obsahující progresivní nákladové funkce, bude k řešení použit linearizační přístup, to znamená, že nelineární účelová funkce bude aproximována po částech lineární funkcí. Opět se tedy pro každou relaci $z_i \rightarrow s_j$ stanoví počet dělících bodů vymezujících jednotlivá pásma, mezi kterými bude nelineární účelová funkce linearizována úsečkou. Analogicky, jako v předchozím případě bude počet dělících bodů pro relaci $z_i \rightarrow s_j$ označen jako p_{ij}. Na základě sousedních dvojic zvolených dělících bodů bude tedy nutno vypočítat hodnoty směrnic úseček, které tyto sousední dvojice bodů propojují. Označme směrnici úsečky k aproximující nelineární funkci v relaci $z_i \rightarrow s_j$ symbolem $\overline{c_{ijk}}$ a horní hraniční hodnotu tohoto pásma symbolem Q_{ijk}, kde $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$, $k = 1,2,..., p_{ij}$.

Výpočet hodnoty směrnice úsečky lze realizovat opět podle vztahu (5.1).

Za účelem modelování objemů přepravy v jednotlivých relacích a pásmech bude do modelu zavedena proměnná y_{ijk}, kde $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$, $k = 1,2,..., p_{ij}$. Obecný matematický model pro řešení dopravní úlohy s degresivně se vyvíjejícími se jednotkovými náklady má tvar:

$$\min f(y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_{ij}} c_{ijk} y_{ijk} \qquad (5.7)$$

Za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_{ij}} y_{ijk} = a_i \qquad i = 1,2,...,m \qquad (5.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_{ij}} y_{ijk} = b_j \qquad j = 1,2,...,n \qquad (5.9)$$

$$Z_{ijk} Q_{ijk} \leq y_{ijk} \qquad i = 1,2,...,m \quad j = 1,2,...,n \quad k = 1,..., p_{ij} \qquad (5.10)$$

$$y_{ijk+1} \leq Z_{ijk} T \qquad i = 1,2,...,m \quad j = 1,2,...,n \quad k = 1,..., p_{ij} - 1 \qquad (5.11)$$

$$y_{ijk} \leq Q_{ijk} - Q_{ijk-1} \qquad i = 1,2,...,m \quad j = 1,2,...,n \quad k = 2,..., p_{ij} \qquad (5.12)$$

$$y_{ijk} \geq 0 \qquad i = 1,2,...,m \quad j = 1,2,...,n \quad k = 1,2,..., p_{ij} \qquad (5.13)$$

$$Z_{ijk} \in \{0;1\} \qquad i = 1,2,...,m \quad j = 1,2,...,n \quad k = 1,2,..., p_{ij} \qquad (5.14)$$

Rovnice (5.7) reprezentuje účelovou funkci. Skupina omezujících podmínek (5.8) zajistí, že kapacity všech zdrojů budou vyčerpány. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu zdrojů. Skupina omezujících podmínek (5.9) zajistí, že požadavky všech spotřebitelů budou splněny. Počet omezujících podmínek ve skupině odpovídá počtu spotřebitelů. Skupiny omezujících podmínek (5.10) a (5.11) zajistí požadované logické vazby mezi objemy přeprav v jednotlivých relacích v závislosti na požadovaném vývoji celkových přepravních nákladů v dané relaci. Tzn. není umožněno zohledňovat sazby v pásmech, ve kterých jsou přepravní náklady nižší (tyto nižší sazby algoritmus při minimalizaci preferuje), dokud nejsou zohledněny sazby v pásmech s vyššími jednotkovými přepravními náklady, které musí být zohledněny, aby došlo k požadovanému průběhu hodnoty příslušného členu hodnoty účelové funkce. Počet omezujících podmínek ve skupině (5.10) závisí na počtu relací a počtu pásem. Počet omezujících podmínek ve skupině (5.11) závisí na počtu relací a počtu pásem sníženém o hodnotu 1. Skupina omezujících podmínek (5.12) zajistí, aby nedocházelo k překračování přípustných objemů přepravy v jednotlivých pásmech. Počet omezujících podmínek odpovídá součinu počtu relací a počtu pásem sníženém o hodnotu 1. Skupiny omezujících podmínek (5.13) a (5.14) vymezují definiční obory proměnných.

6. VÝPOČETNÍ EXPERIMENTY SE SESTAVENÝMI MODELY

Tato kapitola bude věnována výpočetním experimentům se sestavenými obecnými modely nákladových funkcí z předchozí kapitoly. Výpočetní experimenty budou prováděny na konkrétním modelovém případě, k řešení bude použit optimalizační software v programu Xpress-IVE. Tento program je v demoverzi volně dostupný pro akademické účely.

Navržené matematické modely však nelze do optimalizačního software zadávat přímo ve formě uvedené v předchozích kapitolách, je nutno je transformovat do jiné podoby – do podoby textu programu. Nejdříve proto bude uvedeno několik zásad pro transformaci matematického modelu do textu programu, se kterým optimalizační software pracuje. Tímto programovacím jazykem je programovací jazyk MOSEL.

6.1 Základní zásady pro transformaci matematických modelů do textu programu

Samotný text programu začíná zadáním klíčového slova ***model,*** potom uživatel volí svůj název. Následují klíčová slova ***uses „mmxprs“***, a pak deklarační část uvedená klíčovým slovem ***declarations***. V této části nadefinujeme hodnoty všech proměnných a všech konstant, které jsou typu pole. Příklad zápisu, kterým se deklaruje konstanta typu pole může být následující:

a: array(zdr) of real

tímto zápisem se deklarují kapacity všech zdrojů. V textu programu řešené úlohy bude zapotřebí deklarovat proměnnou typu pole, což se učiní zápisem, např:

x: array(zdr,zak,pas) of mpvar

po nadefinování všech proměnných a všech konstant typu pole se deklarační část textu programu ukončí klíčovým slovem:

end-declaration.

Dále následuje vlastní zápis modelu, to znamená konkrétních hodnot jednotlivých konstant, soustavy omezujících podmínek, účelové funkce a příkazu k vyhledání extrému optimalizačního kritéria. Při zápisu skupin omezujících podmínek lze pro zjednodušení využívat různých programátorských klíčových slov a příkazů, které jsou s programovacím jazykem kompatibilní. Takovým příkazem je například příkaz cyklu- ***forall,*** který se využívá v případech, kdy se v soustavě omezujících podmínek vyskytuje více podmínek stejného typu. V dopravní úloze lze příkazu cyklu s úspěchem využít například při zápisu zdrojových a spotřebitelských podmínek. Příkazu cyklu se dá také využít s úspěchem v části programu věnované výpisu dosažených výsledků.

6.2 Model dopravní úlohy s progresivní účelovou funkcí

6.2.1 Formulace problému

Je dáno 5 zdrojů a 5 spotřebitelů, mezi kterými se přepravuje homogenní typ zásilek. U každého zdroje $i = 1, 2, 3, 4, 5$ známe jejich kapacity : $a_1 = 10, a_2 = 20, a_3 =30, a_4 = 40, a_5 = 50$, u každého spotřebitele $j = 1, 2, 3, 4, 5$ známe jejich požadavky $b_1 = 50, b_2 = 40, b_3 = 30, b_4 = 20, b_5 = 10$. Nechť se celkové přepravní náklady v jednotlivých relacích vyvíjejí jednotně, a to podle funkčního vztahu $y = 3x^2$. V každé relaci je dále zadána množina bodů, které budou reprezentovat hranice jednotlivých pásem linearizující funkce. Tyto body jsou taktéž zvoleny pro všechny relace stejně a mají hodnoty: $Q_{ij0} = 0$, $Q_{ij1} = 9$, $Q_{ij2} = 19$, $Q_{ij3} = 29$, $Q_{ij4} = 39$, $Q_{ij5} = 49$,… *pro i = 1, 2 ..., 5 a j = 1, 2 ..., 5.*

Úkolem je rozhodnout o objemech přepravy v jednotlivých relacích (přepravním plánu) tak, aby celkové náklady na realizaci přepravního plánu byly minimální.

6.2.2 Řešení úlohy

Za účelem linearizace je třeba znát hodnoty směrnic pro jednotlivé části aproximující funkce (tyto směrnice reprezentují jednotkové přepravní náklady v aproximující funkci). Lze je vypočítat na základě známého průběhu nákladové funkce a známých poloh dělících bodů, a to podle vztahu (5.1)

Postup výpočtu hodnot směrnic jednotlivých úseků linearizující funkce bude uveden na příkladu relace $z_5 \rightarrow s_1$.

$$\overline{c_{511}} = \frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{(3 \cdot 9^2) - (3 \cdot 0^2)}{9 - 0} = \frac{243 - 0}{9} = 27$$

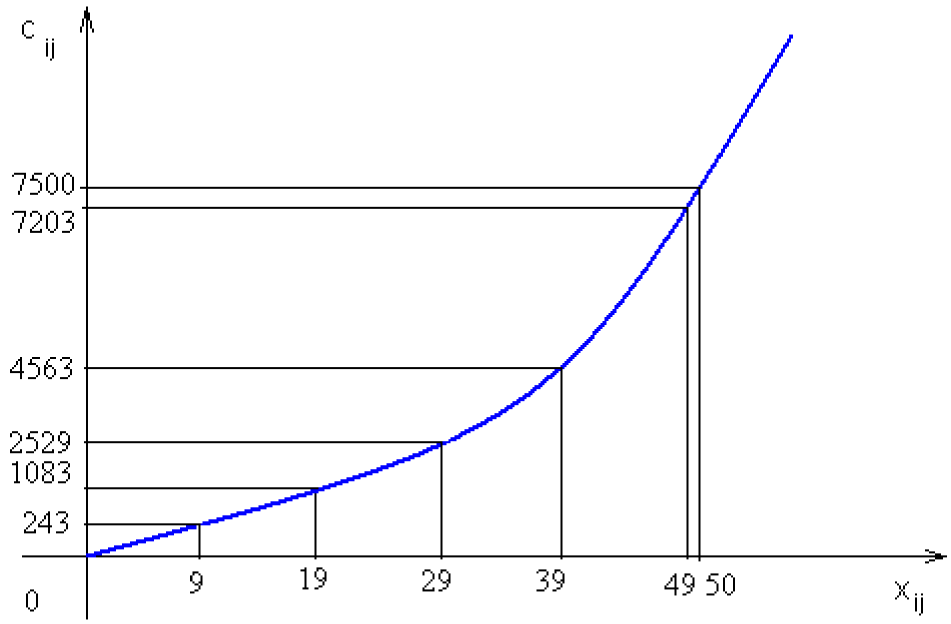
$$\overline{c}_{512} = \frac{f(19)-f(9)}{19-9} = \frac{\left(3\cdot 19^2\right)-\left(3\cdot 9^2\right)}{19-9} = \frac{1084-243}{10} = 84$$

$$\overline{c}_{513} = \frac{f(29)-f(19)}{29-19} = \frac{\left(3\cdot 29^2\right)-\left(3\cdot 19^2\right)}{29-19} = \frac{2523-1083}{10} = 144$$

$$\overline{c}_{514} = \frac{f(39)-f(29)}{39-29} = \frac{\left(3\cdot 39^2\right)-\left(3\cdot 29^2\right)}{39-29} = \frac{4563-2523}{10} = 204$$

$$\overline{c}_{515} = \frac{f(49)-f(39)}{49-39} = \frac{\left(3\cdot 49^2\right)-\left(3\cdot 39^2\right)}{49-39} = \frac{7203-4563}{1} = 264$$

Konkrétní průběh progresivních nákladů v relaci $z_5 \rightarrow s_1$ je uveden v grafu na obr.č 6.1. Graf na obr. č. 6.1 je nutno chápat pouze jako orientační schéma. Při zachování stejného měřítka na obou souřadnicových osách by bylo obtížné jej zkonstruovat.



Obr. č. 6.1 Graf progresivní nákladové funkce v relaci $z_5 \rightarrow s_1$

Reálné počty dělících bodů v jednotlivých relacích jsou však různé, protože maximální objemy přeprav (hodnoty $\min\{a_i, b_j\}$) jsou také různé. Z toho plyne, že také počty směrnic vztahující se k jednotlivým relacím budou různé. Za účelem praktického řešení je vhodné, aby však matice sazeb použitých k linearizaci nelineární nákladových funkci měla ve všech sloupcích stejný počet hodnot (prakticky to znamená, že je požadováno, aby v každé relaci byl stejný počet pásem) je tedy nutno chybějící hodnoty doplnit u relací s nižším počtem pásem doplnit. Doplňované prvky však musí mít takové hodnoty, aby neovlivnily negativně průběh řešení. Protože doplňované hodnoty ve skutečnosti neexistují a je požadováno, aby hodnota účelové funkce byla minimální, lze na pozice chybějících prvků doplnit např. prohibitivní konstanty.

Matice hodnot směrnic pro řešenou úlohu bude mít tvar.

z1-s1	27	57	T	T	T	T
z1-s2	27	57	T	T	T	T
z1-s3	27	57	T	T	T	T
z1-s4	27	57	T	T	T	T
z1-s5	27	57	T	T	T	T
z2-s1	27	84	117	T	T	T
z2-s2	27	84	117	T	T	T
z2-s3	27	84	117	T	T	T
z2-s4	27	84	117	T	T	T
z2-s5	27	57	T	T	T	T
z3-s1	27	84	144	177	T	T
z3-s2	27	84	144	177	T	T
z3-s3	27	84	144	177	T	T
z3-s4	27	84	117	T	T	T
z3-s5	27	57	T	T	T	T
z4-s1	27	84	144	204	239	T
z4-s2	27	84	144	204	239	T
z4-s3	27	84	144	177	T	T
z4-s4	27	84	117	T	T	T
z4-s5	27	57	T	T	T	T
z5-s1	27	84	144	204	264	297
z5-s2	27	84	144	204	239	T
z5-s3	27	84	144	177	T	T
z5-s4	27	84	117	T	T	T
z5-s5	27	57	T	T	T	T

Tab. č. 6.1 Matice hodnot směrnic pro řešenou úlohu

V tomto okamžiku již lze vytvořit text programu v programovacím jazyku MOSEL, který má tvar.

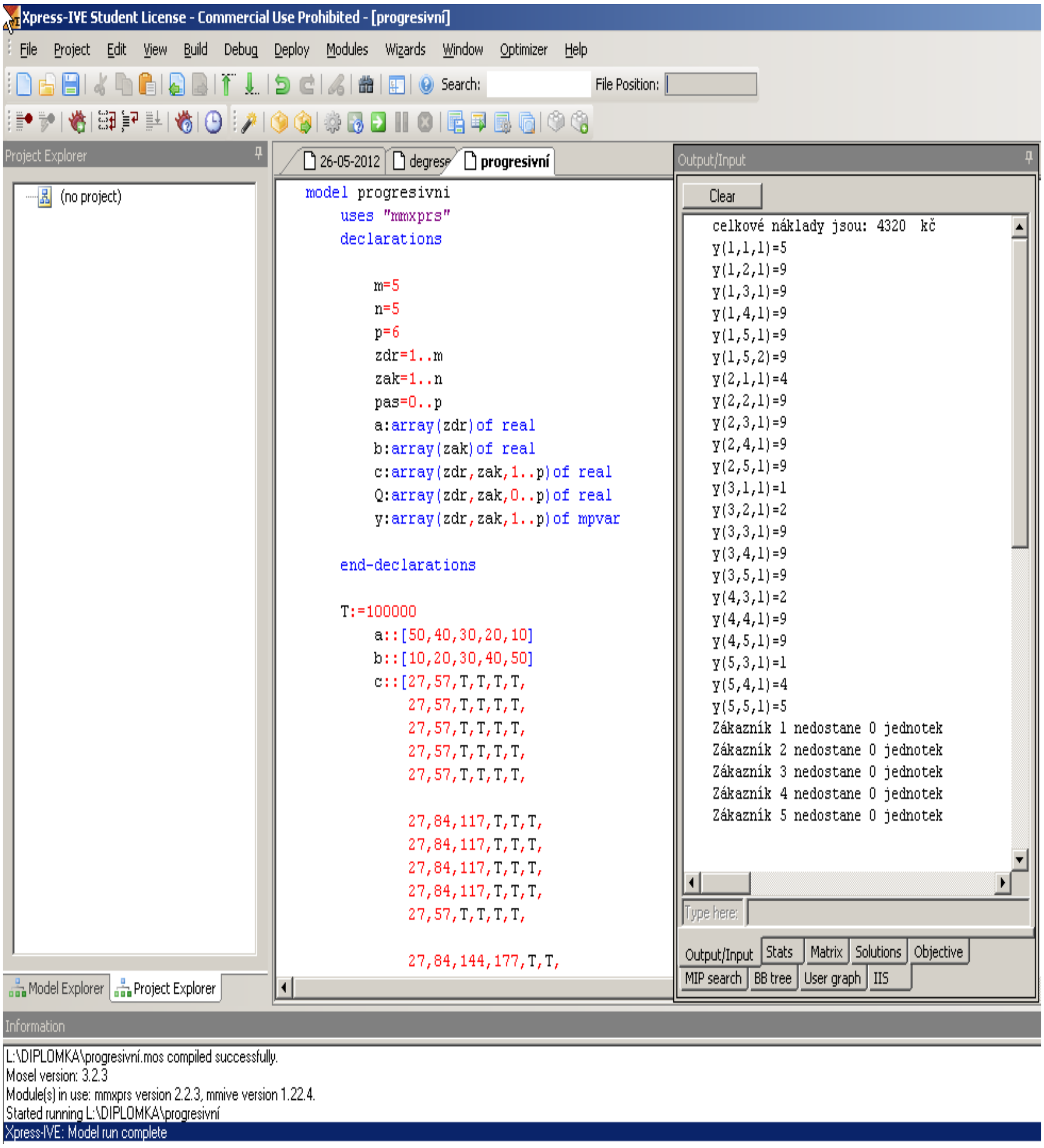
```
model progresivni
    uses "mmxprs"
    declarations

        m=5
        n=5
        p=6
        zdr=1..m
        zak=1..n
        pas=0..p
        a:array(zdr)of real
        b:array(zak)of real
        c:array(zdr,zak,1..p)of real
        Q:array(zdr,zak,0..p)of real
        y:array(zdr,zak,1..p)of mpvar

    end-declarations

    T:=100000
        a::[50,40,30,20,10]
        b::[10,20,30,40,50]
        c::[27,57,T,T,T,T,
            27,57,T,T,T,T,
            27,57,T,T,T,T,
            27,57,T,T,T,T,
            27,57,T,T,T,T,

            27,84,117,T,T,T,
            27,84,117,T,T,T,
            27,84,117,T,T,T,
            27,84,117,T,T,T,
            27,57,T,T,T,T,

            27,84,144,177,T,T,
            27,84,144,177,T,T,
            27,84,144,177,T,T,
            27,84,117,T,T,T,
            27,57,T,T,T,T,
```

```
        27,84,144,204,239,T,
        27,84,144,204,239,T,
        27,84,144,177,T,T,
        27,84,117,T,T,T,
        27,57,T,T,T,T,

        27,84,144,204,264,297,
        27,84,144,204,239,T,
        27,84,144,177,T,T,
        27,84,117,T,T,T,
        27,57,T,T,T,T]

    Q::[0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50,
        0,9,19,29,39,49,50]

forall (i in zdr) sum (j in zak,k in 1..p) y(i,j,k)=a(i)
forall (j in zak) sum (i in zdr, k in 1..p) y(i,j,k)=b(j)
forall (i in zdr, j in zak,k in 1..p-1)y(i,j,k)<=Q(i,j,k)-Q(i,j,k-1)

celkove_naklady:= sum (i in zdr, j in zak,k in 1..p)c(i,j,k)*y(i,j,k)
minimize(celkove_naklady)

writeln ("celkové náklady jsou: ",getobjval,"  kč")
forall (i in zdr,j in zak,k in 1..p|getsol(y(i,j,k))>0) writeln ( "y(",i,",",j,",",k,")=",getsol(y(i,j,k)))
forall(j in zak)writeln("Zákazník ",j," nedostane ",getsol(b(j)-sum(i in zdr,k in 1..p)y(i,j,k))," jednotek")
end-model
```

Po ukončení optimalizačního výpočtu byly získány následující výsledky.

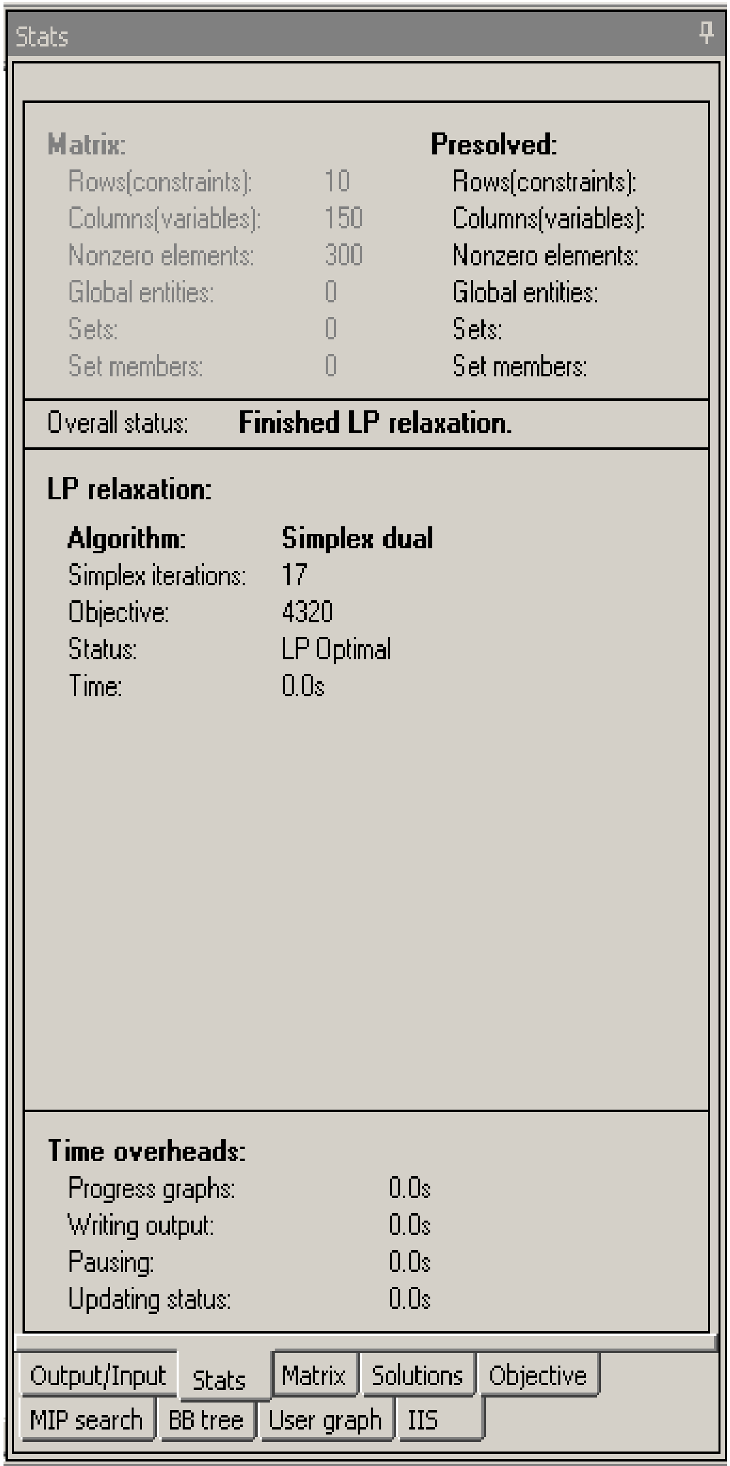
```
celkové náklady jsou: 4320  kč
y(1,1,1)=5
y(1,2,1)=9
y(1,3,1)=9
y(1,4,1)=9
y(1,5,1)=9
y(1,5,2)=9
y(2,1,1)=4
y(2,2,1)=9
y(2,3,1)=9
y(2,4,1)=9
y(2,5,1)=9
y(3,1,1)=1
y(3,2,1)=2
y(3,3,1)=9
y(3,4,1)=9
y(3,5,1)=9
y(4,3,1)=2
y(4,4,1)=9
y(4,5,1)=9
y(5,3,1)=1
y(5,4,1)=4
y(5,5,1)=5
Zákazník 1 nedostane 0 jednotek
Zákazník 2 nedostane 0 jednotek
Zákazník 3 nedostane 0 jednotek
Zákazník 4 nedostane 0 jednotek
Zákazník 5 nedostane 0 jednotek
```

Funkčnost navrženého modelu je patrná z obr. č. 6.2, na kterém je znázorněno pracovní prostředí optimalizačního softwaru, přičemž výše prezentované výsledky jsou uvedeny v pravém pracovním okně:



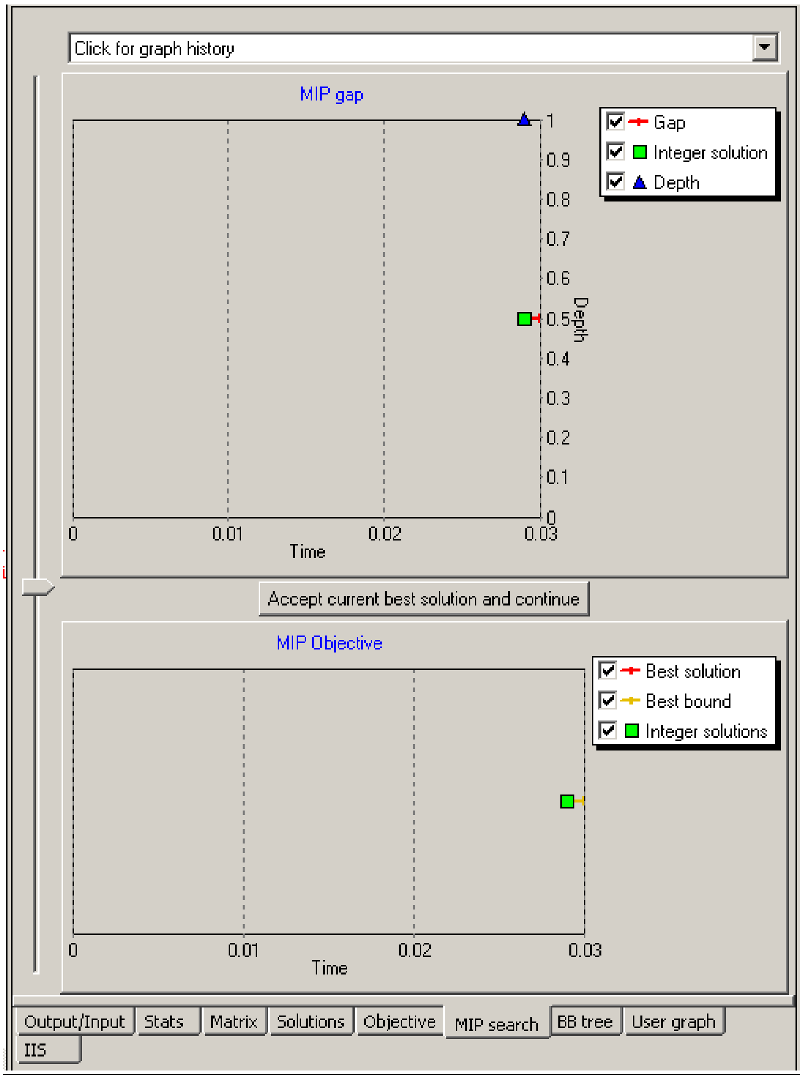
Obr. 6.2 Pracovní prostředí optimalizačního softwaru

Dalším výstupem z optimalizačního výpočtu potvrzujícím optimalitu získaného řešení je souhrnné stavové hlášení znázorněné na obr. č. 6.3.



Obr. 6.3 Souhrnné stavové hlášení potvrzující optimalitu získaného řešení

Průběh optimalizačního výpočtu nejlépe znázorňuje graf uvedený na obr. č. 6.4.



Obr. č. 6.4 Průběh optimalizačního výpočtu

Jak je z uvedeného obrázku patrné, optimální řešení bylo získáno za výpočetní čas 0,03 s.

6.3 Model dopravní úlohy s degresivní účelovou funkcí

6.3.1 Formulace problému

Je dáno 5 zdrojů a 5 spotřebitelů, mezi kterými se přepravuje homogenní typ zásilek. U každého zdroje $i = 1,2,3,4,5$ jsou známy jejich kapacity : $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 30$, $a_4 = 40$, $a_5 = 50$, u každého spotřebitele $j = 1,2,3,4,5$ jsou známy jejich požadavky $b_1 = 50$, $b_2 = 40$, $b_3 = 30$, $b_4 = 20$, $b_5 = 10$. Celkové přepravní náklady se v každé relaci vyvíjejí podle funkčního vztahu $y = 3\sqrt{x}$. V každé relaci je dále zadána množina bodů, které budou reprezentovat hranice jednotlivých pásem linearizující funkce. Tyto body jsou zvoleny pro všechny relace stejně. Za účelem linearizace je třeba znát směrnice pro jednotlivé části aproximující funkce (tyto směrnice reprezentují jednotkové přepravní náklady). Lze je vypočítat na základě známého průběhu nákladové funkce a známých poloh dělících bodů, a to následujícím postupem.

Příklad: nákladová funkce má degresivní tvar $y = 3\sqrt{x}$, výpočet hodnoty směrnice úsečky se bude realizovat podle vztahu

Pro relaci poslední zdroj $a_1 = 50$ a první spotřebitel $b_1 = 50$

$$\overline{c_{511}} = \frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{(3 \cdot \sqrt{9}) - (3 \cdot \sqrt{0})}{9 - 0} = 1$$

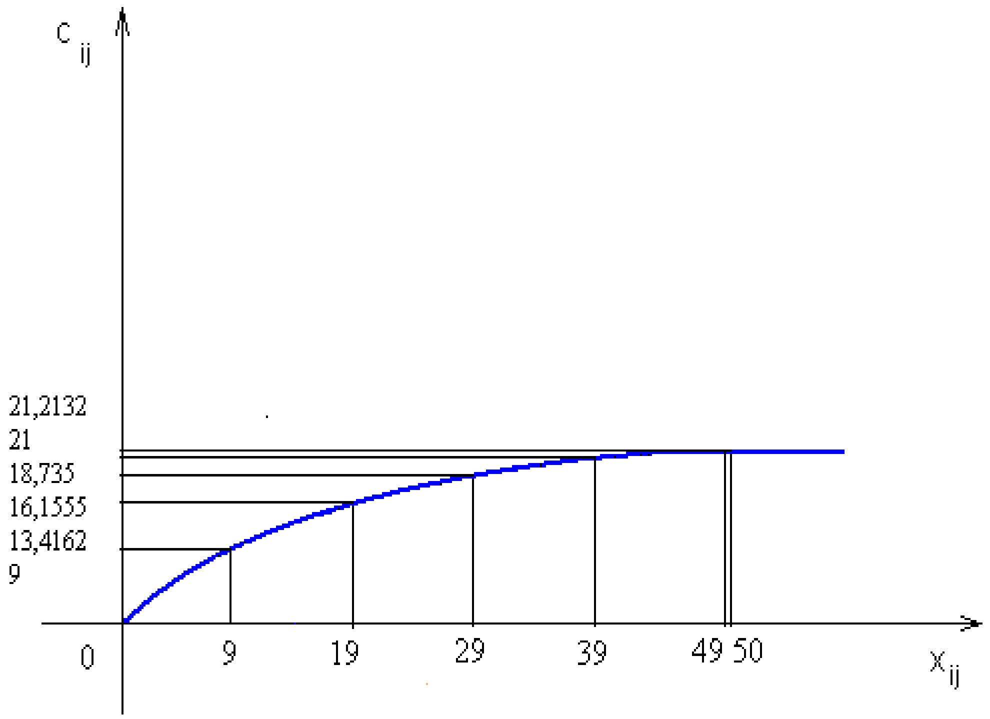
$$\overline{c_{512}} = \frac{f(19) - f(9)}{19 - 9} = \frac{(3 \cdot \sqrt{19}) - (3 \cdot \sqrt{9})}{19 - 9} = 0{,}4076$$

$$\overline{c_{513}} = \frac{f(29) - f(19)}{29 - 19} = \frac{(3 \cdot \sqrt{29}) - (3 \cdot \sqrt{19})}{29 - 19} = 0{,}3078$$

$$\overline{c_{514}} = \frac{f(39) - f(29)}{39 - 29} = \frac{(3 \cdot \sqrt{39}) - (3 \cdot \sqrt{29})}{39 - 29} = 0{,}25975$$

$$\overline{c_{515}} = \frac{f(49) - f(39)}{49 - 39} = \frac{(3 \cdot \sqrt{49}) - (3 \cdot \sqrt{39})}{49 - 39} = 0{,}2265$$

Obr. č. 6.5 Graf degresivní účelové funkce.



Obr. č. 6.5 Graf degresivní účelové funkce

Na základě předchozího výpočtu je možno opět sestavit matici směrnic. Chybějící prvky v těchto maticích v případě relací s nižším počtem dělících bodů budou nahrazeny opět prohibitivními konstantami.

Matice hodnot směrnic pro řešenou úlohu bude mít tvar.

z1-s1	1	0,4868	T	T	T	T
z1-s2	1	0,4868	T	T	T	T
z1-s3	1	0,4868	T	T	T	T
z1-s4	1	0,4868	T	T	T	T
z1-s5	1	0,4868	T	T	T	T
z2-s1	1	0,4076	0,3397	T	T	T
z2-s2	1	0,4076	0,3397	T	T	T
z2-s3	1	0,4076	0,3397	T	T	T
z2-s4	1	0,4076	0,3397	T	T	T
z2-s5	1	0,4868	T	T	T	T
z3-s1	1	0,4076	0,3078	0,3397	T	T
z3-s2	1	0,4076	0,3078	177	T	T
z3-s3	1	0,4076	0,3078	0,3397	T	T
z3-s4	1	0,4076	0,3397	T	T	T
z3-s5	1	0,4868	T	T	T	T
z4-s1	1	0,4076	0,3078	0,2597	0,2387	T
z4-s2	1	0,4076	0,3078	0,2597	0,2387	T
z4-s3	1	0,4076	0,3078	0,2761	T	T
z4-s4	1	0,4076	0,3397	T	T	T
z4-s5	1	0,4868	T	T	T	T
z5-s1	1	0,4076	0,3078	0,2597	0,2265	0,2132
z5-s2	1	0,4076	0,3078	0,2597	0,2387	T
z5-s3	1	0,4076	0,3078	0,2761	T	T
z5-s4	1	0,4076	0,3397	T	T	T
z5-s5	1	0,4868	T	T	T	T

Tab. č. 6.2 Matice hodnot směrnic pro řešenou úlohu

V tomto okamžiku již lze opět vytvořit text programu v programovacím jazyku MOSEL, který má tvar.

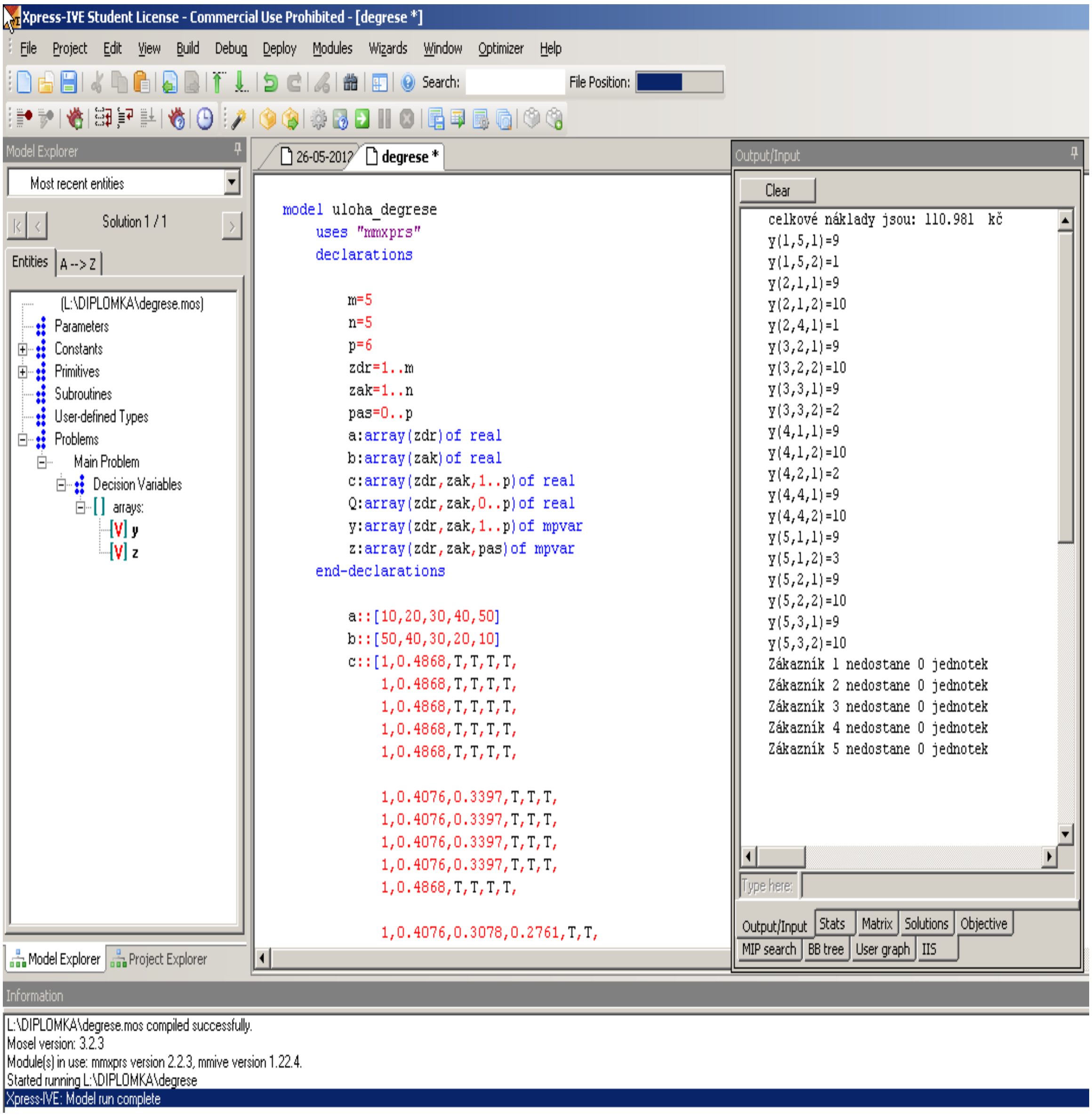
```
model uloha_degrese
    uses "mmxprs"
    declarations

        m=5
        n=5
        p=6
        zdr=1..m
        zak=1..n
        pas=0..p
        a:array(zdr)of real
        b:array(zak)of real
        c:array(zdr,zak,1..p)of real
        Q:array(zdr,zak,0..p)of real
        y:array(zdr,zak,1..p)of mpvar
        z:array(zdr,zak,pas)of mpvar
    end-declarations

        a::[10,20,30,40,50]
        b::[50,40,30,20,10]
        c::[1,0.4868,T,T,T,T,
            1,0.4868,T,T,T,T,
            1,0.4868,T,T,T,T,
            1,0.4868,T,T,T,T,
            1,0.4868,T,T,T,T,

            1,0.4076,0.3397,T,T,T,
            1,0.4076,0.3397,T,T,T,
            1,0.4076,0.3397,T,T,T,
            1,0.4076,0.3397,T,T,T,
            1,0.4868,T,T,T,T,

            1,0.4076,0.3078,0.2761,T,T,
            1,0.4076,0.3078,0.2761,T,T,
            1,0.4076,0.3078,0.2761,T,T,
            1,0.4076,0.3397,T,T,T,
            1,0.4868,T,T,T,T,
```

```
     1,0.4076,0.3078,0.2597,0.2387,T,
     1,0.4076,0.3078,0.2597,0.2387,T,
     1,0.4076,0.3078,0.2761,T,T,
     1,0.4076,0.3397,T,T,T,
     1,0.4868,T,T,T,T,

     1,0.4076,0.3078,0.25975,0.2265,0.2132,
     1,0.4076,0.3078,0.2597,0.2387,T,
     1,0.4076,0.3078,0.2761,T,T,
     1,0.4076,0.3397,T,T,T,
     1,0.4868,T,T,T,T]

Q::[0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50,
     0,9,19,29,39,49,50]


forall (i in zdr) sum (j in zak,k in 1..p) y(i,j,k)=a(i)
forall (j in zak) sum (i in zdr, k in 1..p) y(i,j,k)=b(j)


forall (i in zdr, j in zak,k in 1..p-1)z(i,j,k)*Q(i,j,k)<=y(i,j,k)
forall (i in zdr, j in zak,k in 1..p-1)y(i,j,k+1)<=z(i,j,k)*T



forall(i in zdr,j in zak, k in 1..p)y(i,j,k)<=Q(i,j,k)-Q(i,j,k-1)
forall (i in zdr, j in zak, k in 1..p)y(i,j,k) is_integer
forall (i in zdr, j in zak, k in 1..p)z(i,j,k) is_binary

celkove_naklady:= sum (i in zdr, j in zak,k in 1..p)c(i,j,k)*y(i,j,k)
minimize(celkove_naklady)

writeln ("celkové náklady jsou: ",getobjval,"  kč")
forall (i in zdr,j in zak,k in 1..p|getsol(y(i,j,k))>0) writeln ( "y(",i,",",j,",",k,")=",getsol(y(i,j,k)))
forall(j in zak)writeln("Zákazník ",j," nedostane ",getsol(b(j)-sum(i in zdr,k in 1..p)y(i,j,k))," jednotek")
end-model
```

Po ukončení optimalizačního výpočtu byly získány následující výsledky.

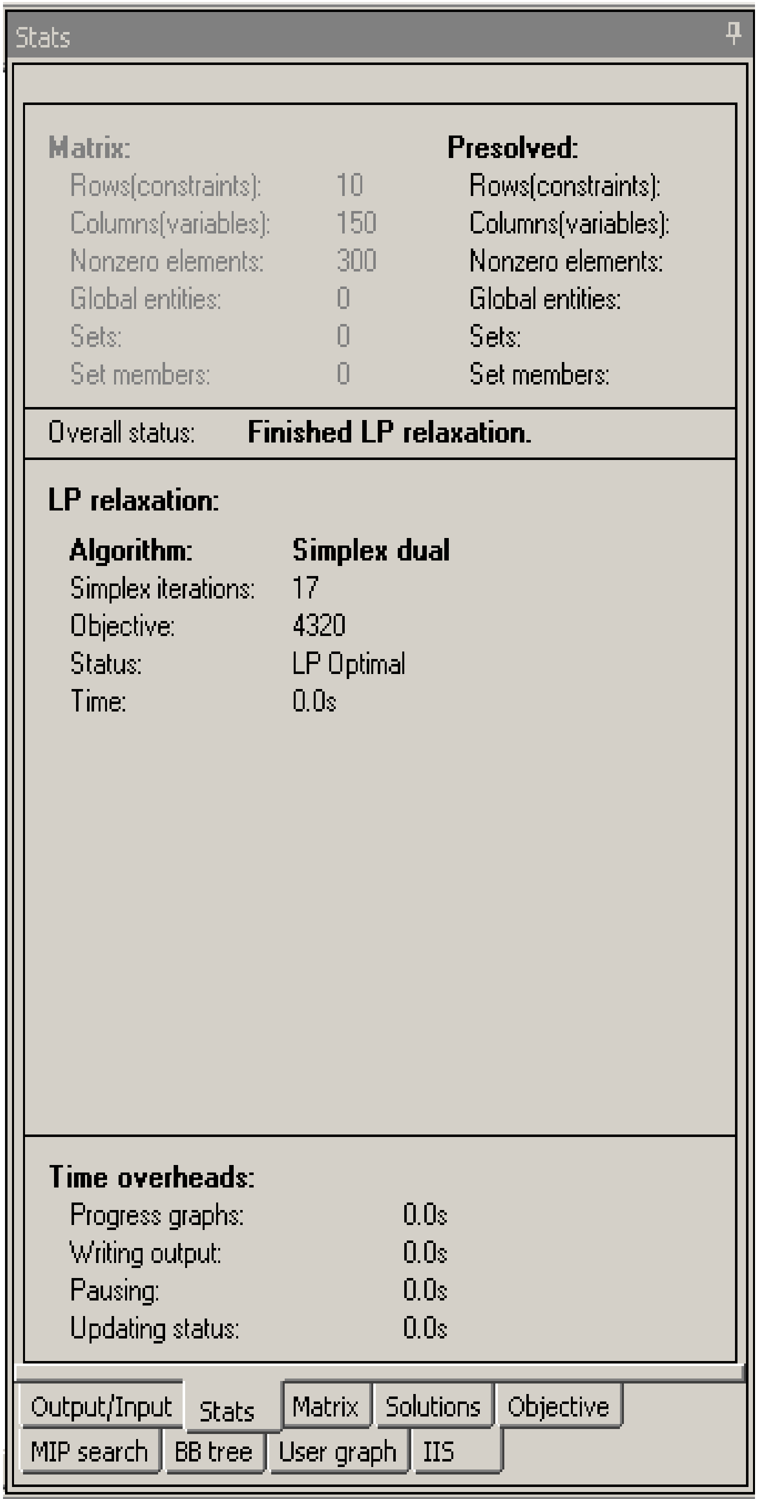
```
celkové náklady jsou: 110.981  kč
y(1,5,1)=9
y(1,5,2)=1
y(2,1,1)=9
y(2,1,2)=10
y(2,4,1)=1
y(3,2,1)=9
y(3,2,2)=10
y(3,3,1)=9
y(3,3,2)=2
y(4,1,1)=9
y(4,1,2)=10
y(4,2,1)=2
y(4,4,1)=9
y(4,4,2)=10
y(5,1,1)=9
y(5,1,2)=3
y(5,2,1)=9
y(5,2,2)=10
y(5,3,1)=9
y(5,3,2)=10
Zákazník 1 nedostane 0 jednotek
Zákazník 2 nedostane 0 jednotek
Zákazník 3 nedostane 0 jednotek
Zákazník 4 nedostane 0 jednotek
Zákazník 5 nedostane 0 jednotek
```

Funkčnost navrženého modelu je opět patrná z obr. č. 6.6, na kterém je znázorněno pracovní prostředí optimalizačního softwaru, přičemž dosažené výsledky jsou uvedeny v pravém pracovním okně.



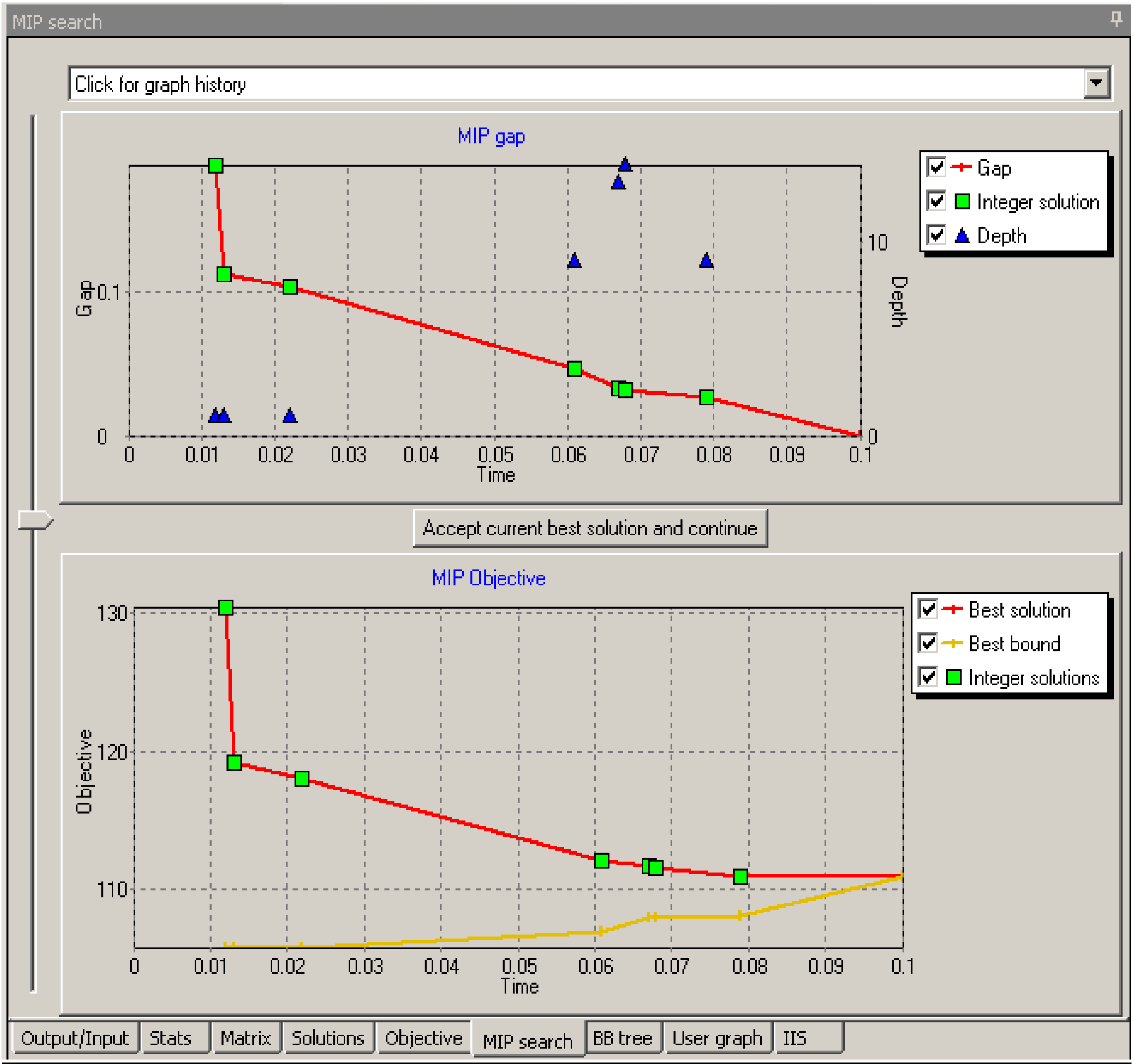
Obr. č. 6.6 Pracovní prostředí optimalizačního softwaru

Dalším výstupem z optimalizačního výpočtu potvrzujícím optimalitu získaného řešení je souhrnné stavové hlášení znázorněné na obr. č. 6.7.



Obr. č. 6.7 Souhrnné stavové hlášení potvrzující optimalitu získaného řešení

Průběh optimalizačních výsledků nejlépe znázorňuje graf uvedený na obr. č. 6.8



Obr. č. 6.8 Průběh optimalizačního výpočtu

Na rozdíl od předchozího experiment je již na první pohled patrné, že výpočet byl nejen časově, ale také z hlediska prohledávání množiny přípustných řešení náročnější. Obrázek v horní části reprezentuje průběh tzv. gapu, což je pásmo vymezené horním a dolním odhadem hodnoty účelové funkce. Horní odhad reprezentuje červená křivka, dolní odhad reprezentuje křivka žlutá. V okamžiku, kdy nastane průsečík obou křivek, byla prohledána odpovídající část množiny přípustných řešení a u posledního celočíselného řešení (reprezentovaných zelenými značkami) byla potvrzena jeho optimalita.

Jak je z uvedeného obrázku patrné, optimální řešení bylo potvrzeno za výpočetní dobu 0,1 s.

7. ZÁVĚR

Předložená bakalářská práce je věnována problematice dopravních úloh, konkrétně se jedná o dopravní úlohy, ve kterých se vyskytují nelineární účelové funkce, resp. nelineární celkové přepravní náklady v jednotlivých relacích.

V úvodních kapitolách práce je definován pojem dopravní úloha, jsou definovány její typy a je uveden základní přehled z oblasti základních pojmů a teoretického aparátu využívaného pro jejich řešení. Nedílnou součástí úvodních kapitol je také zmínka o současné úrovni poznání v problematice modelování dopravních úloh s nelineárními sazbami, která byla nalezena v dostupné literatuře.

Hlavní náplní bakalářské práce bylo rozšíření existujícího modelu dopravní úlohy s výskytem nelineárních celkových přepravních nákladů ve dvou pásmech v jediné relaci v podmínkách většího počtu „vícepásmových relací“, což je uvedeno v kapitole 5. K modelování nelineárních přepravních nákladů byl zvolen aproximační přístup, ve kterém se nelineární funkce nahrazuje po částech lineární funkcí. Hlavní náplní kapitoly a také hlavním výstupem z práce jsou dva stěžejní matematické modely vybilancované dopravní úlohy, u kterých se celkové přepravní náklady v jednotlivých relacích vyvíjejí jak progresivně tak i degresivně.

Kapitola 6 je následně věnována ověření funkčnosti navržených modelů na konkrétním modelovém příkladě. Pro ověření funkčnosti byl opět zvolen typ vybilancované dopravní úlohy a prostřednictvím výpočetních experimentů v optimalizačním software Xpress-IVE bylo ověřeno, že plánování přepravy probíhá v intencích správného vývoje celkových přepravních nákladů v obou případech, tj. jak u nákladů vyvíjejících se progresivně, tak u nákladů vyvíjejících se degresivně.

Navržené modely tak nabízejí variantu vedoucí k odstranění nedostatků existujících lineárních modelů, v situacích, kdy nelze očekávat lineární vývoj, i když pouze s omezenou přesností. V budoucím období je žádoucí zkoumat např. problematiku rozmísťování dílčích bodů ohraničujících jednotlivá nákladová pásma v závislosti na zvolené, resp. požadované přesnosti aproximace.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY:

[1] CENEK, Petr; JÁNOŠÍKOVÁ, Ludmila. Models and Optimisation in Transports and Logistics. Žilina: Žilinská univerzita v Žilině, 2008, ISBN 978-80-8070-951-8

[2] DANĚK, Jan; TEICHMANN, Dušan. Optimalizace dopravních procesů. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2005, ISBN 80-248-0996-6

[3] JANÁČEK, Jaroslav. Matematické programování. Žilina: Žilinská univerzita v Žilině, 2. vydání. 2003. 225 s. ISBN 80-8070-054-0

[4] PALÚCH, Stanislav; PEŠKO, Štefan. Kvantitatívne metódy v logistike. Žilina: Žilinská univerzita v Žilině, 2006. 185 s. ISBN 80-8070-636-0

[5] DORDA, Michal. Kvantitativní metody organizace a řízení, dostupné na:<http://homel.vsb.cz/~dor028/Dopravni_uloha.pdf>